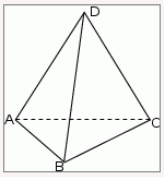
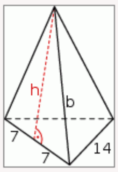


Ściany czworościanu foremnego to cztery trójkąty równoboczne. Zatem korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, mamy wzór na pole powierzchni całkowitej

$$72\sqrt{3} = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad / : \sqrt{3}$$
$$72 = a^2$$
$$a = 6\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: $6\sqrt{2}$

Szkicujemy ostrosłup.



Skoro znamy pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej, to możemy obliczyć pole podstawy.

$$P_p = P_c - P_b = 196\sqrt{3} - 147\sqrt{3} = 49\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

Za wzoru na pole trójkąta równobocznego mamy więc

$$49\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad / \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$4\cdot 49 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = 2\cdot 7 = 14.$$

To oznacza, że w podstawie ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku długości $a = 14$ cm. Jeżeli oznaczymy teraz przez h długość wysokości ściany bocznej, to z podanego pola powierzchni bocznej mamy równanie

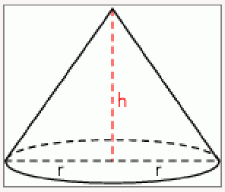
$$147\sqrt{3} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\cdot h$$
$$147\sqrt{3} = 21h \quad / : 21$$
$$h = 7\sqrt{3}.$$

Pozostało obliczyć długość b krawędzi bocznej. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa

$$b = \sqrt{h^2+7^2} = \sqrt{7^2\cdot 3+7^2} = 7\sqrt{3+1} = 14\ \mathrm{cm}.$$

Odpowiedź: Krawędź podstawy: 14 cm, krawędź boczna: 14 cm.

Szkicujemy stożek. Oznaczmy przez r promień jego podstawy, a przez h jego wysokość.



Z podanego pola przekroju mamy

$$16\sqrt{3} = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}$$
$$16\sqrt{3} = r^2\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3}$$
$$16 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 4.$$

Liczymy teraz pole powierzchni całkowitej stożka.

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = 16\pi + 32\pi = 48\pi.$$

Zanim obliczymy objętość, obliczamy wysokość stożka – korzystamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego.

$$h = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Pozostało obliczyć objętość stożka.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h = \frac{1}{3}\pi\cdot 16\cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Odpowiedź: $P_c = 48\pi,\ V = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$

Objętość kulki o promieniu $R = 10$ jest równa

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4000}{3}\pi.$$

Objętość stożka o średnicy $2r = 16$ i wysokości $H = 12$ jest równa

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 \cdot H = 256\pi.$$

Zatem objętość metalu po stopieniu obu brył jest równa

$$V_1 + V_2 = \frac{4000}{3}\pi + 256\pi = \frac{4768}{3}\pi.$$

Jeżeli przez h oznaczymy wysokość otrzymanego walca o średnicy podstawy 8, to mamy równanie

$$\begin{aligned} &\frac{4768}{3}\pi = \pi \cdot 4^2 \cdot h \quad / : 16\pi \\ &\frac{298}{3} = h. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $\frac{298}{3}$ cm

Powiedzmy, że wyjściowy promień podstawy jest równy r, a wysokość H. Zatem objętość jest równa

$$V = \pi r^2 \cdot H.$$

Niech teraz $r' = \frac{1}{10}r$ i H' będą nowymi wymiarami walca, tak aby nie zmieniła się objętość. Mamy równanie

$$\begin{aligned} &\pi r^2 \cdot H = \pi \cdot (r')^2 \cdot H' = \frac{1}{100}\pi r^2 \cdot H' \\ &H' = 100H. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wysokość należy zwiększyć 100 krotnie.